SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Ermanno Lanconelli

PROBLEMI AL CONTORNO PER UNA CLASSE DI OPERATORI ULTRAPARABOLICI SEMILINEARI

1 giugno 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Riassunto. In questa nota viene provato un principio di massimo per soluzioni forti di equazioni del secondo ordine di tipo Kolmogorov-Fokker- Planck. Utilizzando questo principio e alcune stime a priori dimostrate in [BCM] viene poi studiato un problema al contorno per una classe di equazioni semilineari.

Summary: In this note we prove a maximum principle for strong solutions of linear second order Kolmogorov-Fokker-Planck equations. By using this principle together with L^p a-priori estimates proved in [BCM], we study a boundary value problem for a class of semilinear equations.

PROBLEMI AL CONTORNO PER UNA CLASSE DI OPERATORI ULTRAPARABOLICI SEMILINEARI

E. LANCONELLI

Abstract. Dimostriamo un principio di massimo per soluzioni forti di equazioni ultraparaboliche lineari di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck. Tale principio viene poi utilizzato, insieme ad alcune stime a priori in L^p provate in [BCM], per studiare il primo problema di valori al contorno per una classe di operatori semilineari.

1. Richiami e preliminari. Nello studio dei fenomeni di diffusione e dei moti di particelle browniane in un fluido, si incontrano equazioni di evoluzione del tipo seguente

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(z)\partial_{x_i,x_j}u + Yu = f(z,u) \tag{1}$$

dove $z = (x,t)$ indica il punto di $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$, $A(z) = (a_{i,j}(z))$ è una matrice simmetrica semi-definita positiva tale che

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_0(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $A_0(z)$ uniformemente definita positiva in $\mathbf{R}^q$, $1 \le q \le N$:

$$\frac{1}{\mu}|\xi|^q \le \sum_{i,j=1}^{q} a_{i,j}(z)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^q, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^q, \qquad [H.1]$$

μ costante positiva. Inoltre,

$$Y = \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{2}$$

e B è una matrice costante a blocchi che si scrive così

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La matrice B_j ha dimensione $q_{j-1} \times q_j$ e ha rango massimo. Inoltre, $q_0 = q \ge q_1 \ge \cdots \ge q_r$.

Ricordiamo che nel caso di

$$a_{i,j}(z) = a_{i,j} = \text{costante},$$

l'ipotesi [H.1] e la struttura (3) della matrice B comportano la ipoellitticità dell' operatore al primo membro di (1) e la sua invarianza rispetto alle traslazioni a sinistra del gruppo $(\mathbf{R}^{N+1}, \circ)$ con l'operazione di composizione interna così definita:

$$(x',t') \circ (x,t) = (x + E(t+t')x', t+t'), \tag{4}$$

$$E(t) = \exp(-tB^T). \tag{5}$$

Nel caso dei coefficienti costanti l'operatore L è anche invariante per le dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ con

$$D(\lambda) : \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}, \quad D(\lambda)(z) = (\lambda I_{q_0}, \lambda^3 I_{q_1}, \dots, \lambda^r I_{q_r}, \lambda^2)$$

dove I_{q_i} è la matrice identità in $\mathbf{R}^{q_i}$.

I gruppi $(\mathbf{R}^{N+1}, \circ)$ e $(D(\lambda))_{\lambda>0}$, che dipendono soltanto dalla matrice B, si configurano come le strutture algebriche più naturali per lo studio degli operatori L. Ne deriva che in questo contesto la più naturale topologia su $\mathbf{R}^{N+1}$ è quella generata dalla pseudo distanza

$$d(z,\xi) = \|\xi^{-1} \circ z\|,$$

dove $z \to \|z\|$ è una (qualunque) funzione definita positiva e $D(\lambda)$-omogenea di grado 1.

Altrettanto naturali per lo studio di problemi al contorno relativi all'operatore L appaiono gli spazi funzionali $C^\alpha(\Omega, B)$, $C^{2,\alpha}(\Omega, B)$ e $S^p(\Omega)$ rispettivamente così definiti (Ω indica un aperto di $\mathbf{R}^{N+1}$):

$$C^\alpha(\Omega, B) = \{u : \Omega \to \mathbf{R} \mid \|u\|_{\alpha,\Omega} < +\infty\},$$

$$\text{con} \quad 0 < \alpha < 1, \quad \text{e} \quad \|u\|_{\alpha,\Omega} = \sup_\Omega |u| + \sup_{\substack{z,\xi\in\Omega \\ z\neq\xi}} \frac{|u(z) - u(\xi)|}{\|\xi^{-1} \circ z\|^\alpha};$$

$$C^{2+\alpha}(\Omega, B) = \{u : \Omega \to \mathbf{R} \ \mid \ u, D_{x_i}u, D_{x_ix_j}u, Yu \in C^\alpha(\Omega, B), i, j = 1, \dots, q\}.$$

$C^{2+\alpha}(\Omega, B)$ è uno spazio completo rispetto alla norma

$$\|u\|_{2+\alpha,\Omega} = \|u\|_{\alpha,\Omega} + \sum_{i,j=1}^{q} \left(\|D_{x_i}u\|_{\alpha,\Omega} + \|D_{x_ix_j}u\|_{\alpha,\Omega}\right) + \|Yu\|_{\alpha,\Omega}.$$

Infine,

$$S^p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D_{x_i}u, D_{x_ix_j}u, Yu \in L^p(\Omega), i, j = 1, \dots, q\}, \quad 1 < p < \infty.$$

Lo spazio S^p è completo rispetto alla norma

$$\|u\|_{S^p(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{q} \left(\|D_{x_i}u\|_{L^p(\Omega)} + \|D_{x_ix_j}u\|_{L^p(\Omega)}\right) + \|Yu\|_{L^p(\Omega)}.$$

Qui le derivate D_{x_i}, $D_{x_ix_j}$ e Y sono intese in senso debole.

In modo ovvio si definiscono poi gli spazi $C^\alpha_{loc}(\Omega, B)$ e $S^p_{loc}(\Omega)$. Se Ω è un aperto limitato allora

$$C^\alpha(\Omega, B) \subseteq C^\alpha(\Omega) \subseteq C^{\alpha\beta}(\Omega, B), \tag{6}$$

ove $C^\alpha(\Omega)$ indica lo spazio delle funzioni α-hölderiane in senso classico, mentre β è il numero reale

$$\beta = \frac{2}{2r+1}, \quad r = \text{numero di blocchi non nulli di } B.$$

Una dimostrazione delle inclusioni (6) si trova in [M], dove viene inoltre provata la seguente immersione

$$1 < p < \infty, \quad p > \frac{Q+2}{2} \quad \Rightarrow \quad S^p_{loc}(\Omega) \subset C^\alpha_{loc}(\Omega, B),$$

con $\alpha = \min\{2 - \frac{Q+2}{p}, \frac{1}{\beta}\}$. Ancora in [M], sono state dimostrate le seguenti stime a priori per le soluzioni dell'equazione lineare $Lu = g$.

S.1 Se $a_{i,j} \in C^{\alpha}_{loc}(\mathbf{R}^{N+1}, B)$, $i, j = 1, \ldots, q$, se Ω e Ω' sono aperti limitati di $\mathbf{R}^{N+1}$ tali che $\bar{\Omega}' \subseteq \Omega$ e se $u \in C^{2+\alpha}_{loc}(\Omega, B)$ allora

$$\|u\|_{2+\alpha,\Omega'} \leq c\left(\|Lu\|_{\alpha,\Omega} + \|u\|_{\alpha,\Omega}\right).$$

S.2 Se $a_{i,j} \in C(\mathbf{R}^{N+1}, \mathbf{R})$, $i, j = 1, \ldots, q$, se Ω e Ω' sono aperti limitati di $\mathbf{R}^{N+1}$ tali che $\bar{\Omega}' \subseteq \Omega$ e se $u \in S^p_{loc}(\Omega)$ allora

$$\|u\|_{S^p(\Omega')} \leq c\left(\|Lu\|_{S^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}\right).$$

Stime a priori del tipo S.1, unitamente ad un principio di massimo standard per le soluzioni classiche di $Lu = g$ permettono di ottenere teoremi di esistenza negli spazi $C^{2+\alpha}_{loc}(\Omega)$ per problemi al contorno *lineari* relativi agli operatori L con i coefficienti $a_{i,j}$ hölderiani. Stime del tipo S.2, qualora non siano accompagnate da principi di massimo per le *soluzioni forti* di $Lu = g$ non consentono invece di ottenere analoghi teoremi negli spazi $S^p_{loc}(\Omega)$.

Il principale risultato di questa nota è un principio del massimo che estende al presente contesto l'analogo principio negli spazi di Sobolev classici dimostrato da Bony per gli operatori ellittici [B].

Come applicazione di questo risultato, mostreremo poi alcuni teoremi di esistenza di soluzioni forti di problemi al contorno relativi ad equazioni semilineari del tipo (1) nelle ipotesi [H.1] e

$$a_{i,j} \in C(\mathbf{R}^{N+1}, \mathbf{R}), \qquad [H.2]$$

$$f \in C(\mathbf{R}^{N+1} \times \mathbf{R}, \mathbf{R}), \quad \frac{f(z,t)}{t} \to 0, \text{per } |t| \to 0, \qquad [H.3]$$

uniformemente sui compatti di $\mathbf{R}^{N+1}$

2. Principio di massimo in S^p. In questo paragrafo proviamo un principio di massimo per le soluzioni *forti* dell'equazione

$$Lu = g \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{7}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^{N+1}$ e $g \in L^p(\Omega)$, con $1 < p < \infty$. Una soluzione forte di (7) è, per definizione, una funzione $u \in S^p_{loc}(\Omega)$ tale che

$$Lu := \sum_{i,j}^{q} a_{i,j}(z)\partial_{x_i x_j} u(z) + Yu(z) = g(z) \quad \text{q.d. in } \Omega.$$

Assumeremo che l'operatore L verifichi le ipotesi [H.1] e [H.2].

TEOREMA 2.1 (PRINCIPIO DI MASSIMO IN S^p). *Sia $u \in S^p_{loc}(\Omega)$ tale che*

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & q.d. \text{ in } \Omega \\ \limsup_{z \to \zeta} u(\zeta) \leq 0 & \forall \zeta \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Allora, se $\frac{Q+2}{2} < p < \infty$, risulta

$$u \leq 0, \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Nota: Ricordiamo che ogni funzione $u \in S^p_{loc}(\Omega)$ con $p > \frac{Q+2}{2}$ è una funzione localmente hölderiana in Ω.

La dimostrazione del Teorema 2.1 si basa sulla nozione di soluzione debole non variazionale introdotta in [L]. Per richiamare tale nozione sono necessarie alcune premesse. Innanzitutto, l'ipotesi [H.1] assicura che per ogni punto $z \in \mathbf{R}^{N+1}$ l'operatore

$$L^*_z = \sum_{i,j=1}^{q} a_{i,j}(z)\partial_{y_i,y_j} - \langle y, BD\rangle + \partial_\tau, \quad (y,\tau) \in \mathbf{R}^{N+1} \tag{8}$$

è ipoellittico ed ha una soluzione fondamentale Γ di classe C^∞ nel complementare della diagonale di $\mathbf{R}^{N+1} \times \mathbf{R}^{N+1}$ che si può esprimere in forma esplicita (cfr. [LP]).

Per ogni $r > 0$ definiamo allora

$$K_r(z,\zeta) = (\frac{a}{r})^{\frac{Q}{2}} \frac{\langle AD\Gamma, D\Gamma\rangle}{\Gamma^2},$$

dove $A = A(\zeta), \Gamma = \Gamma(z,\zeta)$, D indica il gradiente rispetto alla variabile spaziale di ζ e a è una costante dimensionale assoluta. Infine, Q indica la dimensione omogenea di $\mathbf{R}^N$ rispetto al gruppo $(D(\lambda))_{\lambda>0}$: $Q = q_0 + 3q_1 + \cdots + (2r+1)q_r$.

Definiamo poi gli insiemi di sottolivello di Γ:

$$E_r(z) = \{\zeta \in \mathbf{R}^{N+1} \,|\, \Gamma(z,\zeta) > (\frac{a}{r})^{\frac{Q}{2}}\}.$$

Ricordiamo che risulta

$$\int_{E_r(z)} K_r(z,\zeta)d\zeta = 1, \quad \forall r > 0, \quad \forall z \in \mathbf{R}^{N+1}.$$

(si veda [L][formula (2.11)]).

Infine, definiamo l'operatore di media $M_r(u)$ sugli insiemi di livello E_r:

$$M_r(u)(z) = \int_{E_r(z)} u(s)K_r(z,\zeta)d\zeta.$$

Possiamo ora richiamare la definizione di soluzione debole data in [L].

Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^{N+1}$ e sia $g : \Omega \to \mathbf{R}$. Diciamo che una funzione $u \in C(\Omega)$ è soluzione debole dell'equazione $Lu = g$ in Ω se risulta

$$\lim_{r\to 0} \frac{M_r(u)(z) - u(z)}{r} = g(z), \tag{9}$$

per ogni $z \in \Omega$. In [L] abbiamo provato che le soluzioni classiche di $Lu = g$ verificano (9) in ogni punto di Ω. La prima tappa nella prova del Teorema 2.1 consiste nel dimostrare che il limite in (9) esiste q.d. in Ω se $u \in S^p_{loc}(\Omega)$. Infatti si ha:

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia $1 < p < \infty$ e sia $u \in S^p_{loc}(\Omega)$. Sia poi $g \in L^p_{loc}(\Omega)$ tale che, in senso forte, $Lu = g$ q.d. in Ω. Allora, se indichiamo con $D(u,g)$ l'insieme*

$$\{z \in \Omega \,|\, z \text{ è punto di Lebesgue di } g \text{ e di } D_{x_ix_j}u, \text{ per ogni } \; i,j = 1,\ldots,q\},$$

risulta

$$\lim_{r\to 0} \frac{M_r u(z) - u(z)}{r} = g(z), \quad \forall z \in D(u,g) \tag{10}$$

Nota: Chiamiamo punto di Lebesgue di una funzione $g \in L^p_{loc}(\Omega)$ un punto $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che

$$\lim_{r\to 0} \int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\le r} |g(z) - g(\zeta)| d\zeta = 0.$$

Quasi ogni punto di Ω è punto di Lebesgue di g. Nel seguito supporremo sempre $g(z) = \lim_{r\to 0} \int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\le r} g(\zeta) d\zeta$ in ogni punto di Lebesgue di g.

Dim. Per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $r > 0$ sia

$$\Omega_r(z) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{N+1} | \Gamma(z,\zeta) > \frac{1}{r}\}.$$

Qui, come nelle righe precedenti, $\Gamma(z,\cdot)$ indica la soluzione fondamentale con polo in z dell'operatore L^*_z definito in (8). Se $u \in C^2(\Omega)$ e se $\Omega_r(z) \subseteq \Omega$, con un procedimento standard basato sulla identità di Green si ottiene la seguente formula di rappresentazione

$$u(z) = \frac{1}{r}\left(\int_{\Omega_r(z)} u \frac{\langle AD\Gamma, D\Gamma\rangle}{\Gamma^2} d\zeta - \int_0^r \left(\int_{\Omega_r(z)} L_z u(\Gamma - \frac{1}{\rho}) d\zeta\right) d\rho\right),$$

che si estende poi a tutte le funzioni $u \in S^{2,p}_{loc}(\Omega)$ e a tutti i punti $z \in D(u,g)$.

Questa estensione si ottiene approssimando ogni funzione $u \in S^p_{loc}(\Omega)$ mediante le regolarizzate

$$u^{(\epsilon)}(z) = \int_\Omega u(\zeta) J(D(\epsilon)(\zeta^{-1}\circ z)) d\zeta,$$

essendo J una funzione C^∞ a supporto compatto e con integrale uguale ad 1 ([MO]). Se poniamo

$$u_r(z) = \int_{\Omega_r(z)} u \frac{\langle AD\Gamma, D\Gamma\rangle}{\Gamma^2} d\zeta,$$

allora la (10) è equivalente alla seguente

$$\lim_{r\to 0} \frac{u_r(z) - u(z)}{r^{\frac{2}{Q}}} = g(z), \quad \forall z \in D(u,g). \tag{11}$$

Ora, per la regola di de l'Hopital,

$$\lim_{r\to 0} \frac{u_r(z) - u(z)}{r^{\frac{2}{Q}}} = \lim_{r\to 0} \frac{Q+2}{Q} \frac{\int_{\Omega_r(z)} (\Gamma - \frac{1}{r}) L_z(u) d\zeta}{r^{\frac{2}{Q}}}. \tag{12}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} r^{-\frac{2}{Q}} \int_{\Omega_r(z)} (\Gamma - \frac{1}{r}) L_z u d\zeta &= r^{-\frac{2}{Q}} \int_{\Omega_r(z)} (\Gamma - \frac{1}{r}) g d\zeta \\ &+ r^{-\frac{2}{Q}} \int_{\Omega_r(z)} (\Gamma - \frac{1}{r}) \sum_{i,j=1}^{q} (a_{i,j}(z) - a_{i,j}(\zeta)) \partial_{x_i x_j} u d\zeta. \end{aligned} \tag{13}$$

Il calcolo dei limiti al secondo membro di (13) è allora una facile conseguenza del seguente lemma.

LEMMA 2.3. *Se $h \in L^p_{loc}(\Omega)$ e se z è un punto di Lebesgue di h allora*

$$\lim_{r\to 0} r^{-\frac{2}{Q}} \int_{\Omega_r(z)} (\Gamma - \frac{1}{r}) h(\zeta) d\zeta = h(z).$$

Con questo lemma la dimostrazione di (11) è immediata. Infatti, se $z \in D(u,g)$, allora

$$\lim_{r\to 0} r^{-\frac{2}{Q}} \int_{\Omega_r(z)} (\Gamma - \frac{1}{r}) g(\zeta) d\zeta = g(z) \tag{14}$$

mentre, anche per la continuità di $a_{i,j}$

$$\begin{aligned} 0 &\le \limsup_{r\to 0} \left| r^{-\frac{2}{Q}} \int_{\Omega_r(z)} (\Gamma - \frac{1}{r})(a_{i,j}(z) - a_{i,j}(\zeta)) d\zeta \right| \\ &= \limsup_{r\to 0} \left(\sup_{\zeta\in\Omega(\zeta)} |a_{i,j}(z) - a_{i,j}(\zeta)| \right) \left(r^{-\frac{2}{Q}} \int_{\Omega_r(z)} (\Gamma - \frac{1}{r})(\partial_{x_i x_j} u(\zeta)) d\zeta \right) \\ &= \lim_{r\to 0} \left(\sup_{\zeta\in\Omega(\zeta)} |a_{i,j}(z) - a_{i,j}(\zeta)| \right) |\partial_{x_i x_j} u(\zeta)| = 0. \end{aligned}$$

Da questa e dalla (14), utilizzando (12) e (13) segue subito la (11). □

La seconda tappa della prova del Teorema 2.1 consiste nella dimostrazione del seguente risultato, che si ottiene utilizzando alcune idee contenute in [B].

PROPOSIZIONE 2.4. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^{N+1}$ e sia $u \in C^\alpha(\Omega, B)$ con $0 < \alpha \le 1$. Supponiamo*

(i) $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \le 0$, $\forall \zeta \in \partial\Omega$,

(ii) $u(z) > 0$ *in qualche punto di* Ω

Sia poi $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N+1})$ un punto di massimo per u. Per ogni $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}) \in \mathbf{R}^{N+1}$ indichiamo con v_λ la funzione

$$v_\lambda : \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}, \quad v_\lambda(z) = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j (x_j - \alpha_j)^2$$

e con F_λ l'insieme $F_\lambda = \{z \in \Omega \,|\, z$ è punto di massimo di $u + v_\lambda\}$. Esiste allora $\bar{\epsilon} > 0$ tale che

$$\bigcup_{\|\lambda\|\le\epsilon} F_\lambda$$

ha misura esterna positiva per ogni $\epsilon > 0$, $\epsilon < \bar{\epsilon}$.

Dalle Proposizioni 2.2 e 2.4 si ottiene facilmente la dimostrazione del Teorema 2.1.

Dim. [Del Teorema 2.1]. Ragioniamo per assurdo e supponiamo $u > 0$ in qualche punto di Ω. Esiste allora $\alpha \in \Omega$ tale che $u(\alpha) = \max_\Omega u$. Con un semplice calcolo diretto si verifica l'esistenza di un numero reale positivo σ tale che

$$Lv_\lambda > 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

per ogni $\lambda \in \mathbf{R}^{N+1}$, tale che $\|\lambda\| < \sigma$. Scegliamo ora $\epsilon > 0$, $\epsilon < \min\{\bar{\epsilon}, \sigma\}$, dove $\bar{\epsilon}$ è dato dalla Proposizione 2.4. Allora

$$\bigcup_{\|\lambda\| \leq \epsilon} F_\lambda$$

ha misura esterna positiva, e quindi, poichè $\Omega \setminus D(u,g)$ ha misura nulla,

$$\left(\bigcup_{\|\lambda\| \leq \epsilon} F_\lambda \right) \cap D(u,g) \neq \emptyset.$$

Esiste pertanto $\lambda \in \mathbf{R}^{N+1}$, con $|\lambda| < \sigma$, ed esiste $z \in F_\lambda$ tale che $z \in D(u,g)$. Per la Proposizione 2.4 risulta pertanto

$$\lim_{r \to 0} \frac{M_r(u)(z) - u(z)}{r} = Lu(z) \geq 0$$

e quindi, posto $w_\lambda = u + v_\lambda$,

$$\lim_{r \to 0} \frac{M_r(w_\lambda)(z) - (w_\lambda)(z)}{r} = Lu(z) + Lv_\lambda(z) > 0. \tag{15}$$

D'altra parte, poichè z è un punto di massimo di w_λ, per tutti gli $r > 0$ sufficientemente piccoli, risulta

$$\begin{aligned} \frac{M_r(w_\lambda)(z) - (w_\lambda)(z)}{r} &= \frac{1}{r} \int_{E_r(z)} w_\lambda(\zeta) K_r(z,\xi) d\xi - w_\lambda(z) \\ &= \frac{1}{r} \int_{E_r(z)} (w_\lambda(\zeta) - w_\lambda(z)) K_r(z,\xi) d\xi \leq 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{r \to 0} \frac{M_r(w_\lambda)(z) - (w_\lambda)(z)}{r} \leq 0.$$

Questo contraddice la (15) e completa la dimostrazione. □

3. Problema di Dirichlet lineare. Nel corso di questo paragrafo indicheremo sempre con Ω un aperto limitato *fortemente regolare* per L, tale cioè che, per ogni $z \in \partial\Omega$ esiste un vettore $\lambda \in \mathbf{R}^{N+1}$ per cui risulta

$$B(z + \nu, |\nu|) \cap \Omega = \emptyset, \qquad \langle A(z)\nu, \nu \rangle = 0.$$

Proveremo l'esistenza di una soluzione forte del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = g & \text{in } \Omega \\ u\,|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases} \tag{16}$$

per ogni $g \in C(\bar{\Omega})$ e per ogni $\phi \in C^\alpha(\partial\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$. Procediamo nella maniera seguente. Per ogni $\epsilon > 0$, indichiamo con $L^{(\epsilon)}$ l'operatore

$$L^{(\epsilon)} = \sum_{i,j=1}^{q} a_{i,j}^{(\epsilon)}(z) \partial_{x_i x_j} + Y$$

dove $a_{i,j}^{(\epsilon)}$ è una regolarizzazione (C^∞) di $a_{i,j}$. Indichiamo poi con $g^{(\epsilon)}$ un'analoga regolarizzazione di g. Dai risultati di Manfredini si ricava l'esistenza di una soluzione $u^{(\epsilon)}$ del problema (16), con

$$u^{(\epsilon)} \in C^\gamma(\bar{\Omega}) \cap S^p_{loc}(\Omega)$$

per un opportuno $\gamma > 0$, indipendentemente da ϵ, e per ogni $p > \frac{Q+2}{2}$, $p < \infty$. Inoltre, per ogni aperto $\Omega' \subseteq \bar{\Omega}' \subseteq \Omega$, si ha

$$\|u^{(\epsilon)}\|_{S^p(\Omega')} \leq c\left(\|u^{(\epsilon)}\|_{L^p(\Omega)} + \|g^{(\epsilon)}\|_{L^p(\Omega)}\right) \tag{17}$$

dove c non dipende da ϵ. Infine $(u^{(\epsilon)})$ è una soluzione classica di $L^{(\epsilon)}u^{(\epsilon)} = g^{(\epsilon)}$ $\left(u^{(\epsilon)} \in C^{2+\alpha(\epsilon)}_{loc}(\Omega)\right)$.

Dal principio di massimo per le soluzioni classiche si trae allora

$$\sup_{\bar{\Omega}} |u^{(\epsilon)}| \leq C(g, \phi)$$

per ogni $\epsilon > 0$, $\epsilon \leq \epsilon_0$. Da queste e da (17) si ottiene

$$\|u^{(\epsilon)}\|_{S^p(\Omega')} \leq C_1(g, \phi)$$

per ogni $\epsilon > 0, \epsilon \leq \epsilon_0$.

Esiste una successione $(u_j) = (u^{(\epsilon_j)})$ ed esiste una funzione $u \in S^p_{loc}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che

$$u_j \to u, \quad \text{unif. in} \quad \bar{\Omega}, \quad u_j \xrightarrow{deb} u, \text{in} \quad S^p_{loc}(\Omega).$$

Ne viene allora che u è soluzione forte dell'equazione $Lu = g$ e verifica la condizione al contorno $u\,|_{\partial\Omega} = \phi$. Possiamo quindi enunciare il principale risultato di questo paragrafo.

TEOREMA 3.1. *Per ogni funzione $g \in C(\bar{\Omega})$ e per ogni funzione $\phi \in C^\alpha(\partial\Omega), 0 < \alpha < 1$, esiste una sola $u \in C(\bar{\Omega}) \cap S^p_{loc}(\Omega)$ soluzione forte del problema (16).*

Dim. L'esistenza è stata provata nelle righe precedenti. L'unicità segue dal Teorema 2.1. □

4. Problema di Dirichlet semilineare su aperti fortemente regolari. In questo paragrafo assumeremo su L e su f le ipotesi [H.1]-[H.3] e proveremo un teorema di esistenza per il problema semilineare

$$\begin{cases} Lu = f(z, u) & \text{in} \quad \Omega \\ u\,|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases} \tag{18}$$

ove Ω è un aperto fortemente regolare per L e $\phi \in C^\alpha(\partial\Omega)$, $0 < \alpha < 1$.

Per ogni $v \in C(\bar{\Omega})$ indichiamo con

$$u = T(v)$$

la (unica) soluzione $u \in C(\bar{\Omega}) \cap S^p_{loc}(\Omega)$, $\frac{Q+2}{2} < p < \infty$, del problema

$$\begin{cases} Lu = f(z, v) & \text{in} \quad \Omega \\ u\,|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases} \tag{19}$$

Dalla immersione di $S^p_{loc}(\Omega)$ in uno spazio di funzioni localmente hölderiane e dalla hölderianità di ϕ, con un procedimento standard basato sulla nozione di barriera nei punti di $\partial\Omega$ e sull'uso del principio di massimo del Teorema 2.1, si prova che esiste $\gamma > 0$ tale che

$$\|T(v)\|_\gamma \leq c \sup_{\bar{\Omega}} |f(\cdot, v)|, \tag{20}$$

dove $\|\cdot\|_\gamma$ indica qui la norma nello spazio $C^\gamma(\Omega)$. D'altra parte, per l'ipotesi [H.3], per ogni $\epsilon > 0$, esiste una costante $c_0 > 0$ tale che

$$|f(z,t)| \leq c_0 + \epsilon|t|.$$

Da questa e dalla (20) si trae

$$\|T(v)\|_\gamma \leq c_1, \quad \forall v \in C(\bar{\Omega}). \tag{21}$$

Questa stima dimostra che il rango di T è relativamente compatto in $C(\bar{\Omega})$. Utilizzando il principio di massimo del Teorema 2.1, si prova poi che T ha il grafico chiuso. Ne viene allora che T è completamente continua.

Dalla stima a priori (21) e dal Teorema del punto fisso di Schauder segue che T ha (almeno) un punto fisso $u \in C(\bar{\Omega})$.

Per definizione di T tale u è quindi una soluzione forte del problema (18).

5. Problema di Dirichlet semilineare su aperti arbitrari. Se alle ipotesi [H.1]-[H.3] aggiungiamo la seguente

$$f(z,\cdot) \quad \text{è monotona crescente per ogni fissato} \quad z \in \Omega \qquad [H.4]$$

a partire dai risultati del paragrafo precedente, si può utilizzare il metodo di Perron delle sopra e delle sotto soluzioni per provare l'esistenza di una soluzione generalizzata (nel senso della teoria del potenziale) del problema al contorno

$$\begin{cases} Lu = f(z,u) & \text{in} \quad \Omega \\ u\,|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases}$$

dove Ω è un arbitrario aperto limitato di $\mathbf{R}^{N+1}$ e $\phi \in C(\partial\Omega)$. Omettiamo ogni ulteriore dettaglio.

BIBLIOGRAFIA

[BCM] M. Bramanti, M. C. Cerutti, M. Manfredini, *L^p estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coefficients*, preprint.

[B] J. M. Bony, *Principe du maximum dans les espaces de Sobolev*, CRAS, Paris, n. 206, pp. 333-336 (1967).

[L] E. Lanconelli, *Soluzioni deboli non variazionali di equazioni di tipo Fokker-Planck*, Sem. An. Mat., Dip. di Mat., Univ. Bologna, 1993.

[LP] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Partial Diff. Eqs. 52:1 (1994), pp. 29-63.

[M] M. Manfredini, *Stime a priori e problema al contorno per una classe di operatori ultraparabolici*, Tesi di Dottorato, Università di Bologna, 1995.

[MO] D. Morbidelli, *Lavoro in preparazione.*